ÉCOLE NATIONALE DU GÉNIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT
DE STRASBOURG

# CONCOURS D'ENTRÉE 2000

## ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES B

## FILIERE PHYSIQUE ET SCIENCES DE L'INGENIEUR

**DURÉE : 2 heures 30**

*N.B.* : Ce *sujet comporte 3 pages de texte*

***Les calculatrices sont interdites***

***Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.***

Cette épreuve comporte 2 problèmes

**PROBLEME 1**

Dans ce problème ,m et n sont deux entiers vérifiant $m \geq n > 0$, A est une matrice réelle à m lignes et n colonnes ;B est un élément de $\mathbb{R}^m$ .On identifie tout élément de $E=\mathbb{R}^n$ ,ou de $F=\mathbb{R}^m$, avec sa matrice unicolonne associée dans une base canonique fixée. On note $(X,Y) \longmapsto (X|Y)$ les produits scalaires dans les espaces euclidiens E et F et $X \longmapsto \|X\|$ les normes associées .

**1°) a)** Ecrire en fonction des colonnes X,Y le produit scalaire $(X|Y)$ ainsi que la norme $\|X\|$.

**b)** Soit $\varphi$ une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, démontrer qu'il existe un vecteur U de E tel que , pour tout X de E , $\varphi(X) = (X|U)$ .

**c)** Soit f une application linéaire de E dans F , démontrer qu'il existe une application linéaire g de F dans E telle que

$\forall\ (X,Y) \in E \times F\ ,\ (f(X)|Y) = (X|g(Y))$ .

Si A désigne la matrice de f , calculer la matrice de g dans les bases canoniques de E et F .

**2°)** On considère la partie $J = \{ \|A.X - B\|^2 , X \in \mathbb{R}^n \}$ de $\mathbb{R}$ et on pose $K_0 = \text{Inf}(J)$ . Justifier l'existence du réel $K_0$ , montrer que la valeur $K_0$ est atteinte.

On donne maintenant le système d'équations linéaires (m équations ,n inconnues) :

$$(\mathcal{S}) \quad A.X = B .$$

On appelle pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ tout élément Y de $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'équation:

$$\|A.X - B\|^2 = K_0$$

et l'on associe à $(\mathcal{S})$ le système $(\mathcal{S}')$ ${}^tA.A.X = {}^tA.B$ .

**3°)** **a)** Démontrer qu'un élément Y de $\mathbb{R}^n$ est pseudo-solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement s'il est solution de $(\mathcal{S}')$.

( ***Indication : on pourra écrire*** $AX - B = A(X - Y) + (AY - B)$ ) et poser X - Y = tU où t est un réel variable et U un vecteur fixé adéquat).

**b)** Soit le sous-espace de F , $G = \{ AX , X \in E \}$ , et soit p le projecteur orthogonal de F sur G . Y étant pseudo solution de $(\mathcal{S})$ ,comparer AY et p(B) .

**4°)** **a)** Démontrer que les équations $A.X = O_m$ et ${}^tA.A.X = O_n$ sont équivalentes ( $0_m$ et $0_n$ désignent les colonnes nulles de E et F ) .

**b)** En déduire que $rg(A) = rg({}^tA.A)$ .

5°) Démontrer que ,si A est de rang n ,alors $(\mathcal{S})$ admet une et une seule pseudo-solution .

6°) On considère ,à titre d'exemple, le système $(\mathcal{S})$

$$\begin{cases} -x + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ z = -3 \\ x + 2z = 4 \end{cases}$$

**a)** Vérifier que le système $(\mathcal{S})$ est impossible.

**b)** Calculer la (ou les) pseudo-solution(s) de $(\mathcal{S})$ .

## PROBLEME 2

On considère sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ $y'(1+x^2) = 1+3xy$

1°) Résoudre $(\mathcal{E})$; vérifier qu'il existe une unique fonction g, solution de $(\mathcal{E})$, qui admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$ .

2°) Calculer et étudier le signe de la dérivée g' de g.

3°) Etudier la limite éventuelle de $\frac{g(x)}{x^3}$ quand x tend vers $-\infty$. Etudier s'il existe une courbe élémentaire polynomiale asymptote.

4°) Représenter graphiquement la fonction g avec ses asymptotes.

MATHB PSI2000